Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y T.I.
CI–2521 Discretas I
Abril–Julio 2010

Una prueba

Va una prueba del ejercicio 2.h de la práctica (Teorema 1.55):

$$\mathscr{P}(A - B) \subseteq (\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$$

Sea x en $\mathscr{P}(A - B)$.
Si x es $\emptyset$, entonces es claro que está contenido en $(\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$
Sino, $x \subseteq A - B$.
Es decir, que para todo z en x, tenemos que $z \in A$, y $z \notin B$.
De lo primero, obtenemos que $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in A)$, es decir $x \subseteq A$. Por tanto x en $\mathscr{P}(A)$.
De lo segundo, obtenemos que $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \notin B)$. Probaremos que x no en $\mathscr{P}(B)$.
$(\forall z | z \in x : z \notin B)$
$\Rightarrow$ $<$Debilitamiento del para todo. O instanciacion mas introduccion del existencia $>$
$(\exists z | z \in x : z \notin B)$
$\equiv$ $<$De Morgan $>$
$\neg(\forall z | z \in x : z \in B)$
$\equiv$ $<$Definicion de $\subseteq$ $>$
$\neg(x \subseteq B)$
$\equiv$ $<$Definition de $\mathscr{P}$$>$
$\neg(x \in \mathscr{P}(B))$
$\equiv$
$x \notin \mathscr{P}(B)$.
Por lo tanto, x en $\mathscr{P}(A)$ y $x \notin \mathscr{P}(B)$. Por definicion de $-$, tenemos que x en $\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)$.
Por tanto, en cualquier caso $(\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$.
Concluimos que

$$\mathscr{P}(A - B) \subseteq (\mathscr{P}(A) - \mathscr{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$$